



**Cosmina Ioana Bondor – autor**

## Probabilități



ALWAYS



SEEK



KNOWLEDGE

# Objective

- Semnificația termenului probabilitate
- Calcule cu probabilitati
- Probabilitati conditionate
- Exemple

# Teoria probabilitatilor – parte a stiintei matematice

- Studiază legile după care se manifestă fenomenele imprevizibile
- Cu caracter de masă
- În diverse domenii de interes (natură, societate, biologie, medicină etc.).

# Experiment / trial/ eveniment



- Un **experiment** este o acțiune / proces repetată de mai multe ori, dar cu rezultat diferit (imprevizibil) aplicat unei singure entități (individ, subiect)
- Fiecare repetare se numește **trial** (incercare)
- **Evenimente** = din fiecare trial pot rezulta unul sau mai multe rezultate

# Experiment aleator/deterministic

Aleator – cu rezultate intamplatoare

- În cazul repetării în aceleași condiții rezultatele prezintă o regularitate statistică.

Experiment aleator  $\leftrightarrow$  Experiment deterministic (stim care va fi rezultatul)

# Definiția probabilității teoretice

- **Definiție:** probabilitatea unui eveniment  $A$   $Pr(A)$  este definita prin:

$$Pr(A) = \frac{\text{Numărul de cazuri favorabile evenimentului } A}{\text{Numărul de cazuri posibile}}$$

# Probabilitatea

- Teoretică (cum ne așteptăm să fie)
- Experimentală (cum este în realitate)
- Ex. genul:
  - probabilitatea teoretica a nasterii unui baiat este 0,5 (50% dintre nasteri),
  - probabilitate empirica a nasterii unui baiat in Romania in 2001 a fost de 0,494

# Probabilitatea empirica

- Probabilitatea empirică – frecvența relativă
- Probabilitatea teoretică poate fi estimată cu probabilitatea empirică (adică cu frecvența relativă)



# Probabilitatea $\Pr(X)$

- $\Pr(X) \geq 0$  și  $\Pr(X) \leq 1$ ,  
unde  $X$  orice eveniment

$$0 \leq \Pr(X) \leq 1$$



- A și B sunt independente – atunci când probabilitatea apariției lui A nu afectează probabilitatea apariției lui B și probabilitatea apariției lui B nu afectează probabilitatea apariției lui A

$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) * \Pr(B)$  – pentru evenimente independente

# Evenimente dependente

- A și B sunt dependente – atunci când probabilitatea apariției lui A influențează probabilitatea apariției lui B sau probabilitatea apariției lui B influențează probabilitatea apariției lui A

A,B două evenimente dependente:

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A \text{ dependent de } B) * \Pr(B)$$

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A|B) * \Pr(B)$$

- $\Pr(A|B) = \Pr(A \text{ dependent de } B)$

Oricare două evenimente A, B:

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A \text{ sau } B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \text{ și } B)$$

$\Pr(A \text{ și } B)$

Dacă A, B două evenimente independente:

$$\Pr(A \text{ și } B) = \Pr(A) * \Pr(B)$$

Dacă A, B două evenimente dependente:

$$\Pr(A \text{ și } B) = \Pr(\text{A dependent B}) * \Pr(B)$$

$$\Pr(A \text{ și } B) = \Pr(A|B) * \Pr(B)$$

Oricare două evenimente A, B:

$$P(A \cup B) = P(A \text{ sau } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ și } B)$$

Dacă A, B două evenimente independente:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) * P(B)$$

Dacă A, B două evenimente dependente:

$$P(A \cup B) = P(A \text{ sau } B) = P(A) + P(B) - \underline{P(A|B)} * P(B)$$

Dacă A, B sunt evenimente **mutual exclusive**

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A \text{ și } B) = 0$$

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A \text{ sau } B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$

Dacă B este un eveniment **complementar** lui A

$$\Pr(B) = \Pr(\text{eveniment complementar lui A}) = \Pr(\text{non A}) = 1 - \Pr(A)$$

Dacă A este un eveniment **cert** (se întâmplă la fiecare trial)

$$\Pr(\text{eveniment cert}) = 1$$

Dacă A este un eveniment **imposibil**

$$\Pr(\text{eveniment imposibil}) = 0$$

# $P(A | B)$ = probabilitatea conditionată

- Probabilitatea ca evenimentul A să apară dacă evenimentul B s-a realizat deja

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)}$$

- test diagnostic aplicat la  $n$  persoane:

Boală / Test nou	B Cu boală	non(B) Fără boală	Total
T test nou pozitiv	$a$ (AP)	$b$ (FP)	$a+b$
non (T) test nou negativ	$c$ (FN)	$d$ (AN)	$c+d$
Total	$a+c$	$b+d$	$n$



# Valoarea predictiva pozitiva PPV

- Probabilitatea ca un test nou pozitiv să indice boala (să fie corect):

$$VPP = Pr(B|T) = \frac{Pr(B \cap T)}{Pr(T)} = \frac{\frac{AP}{n}}{\frac{AP + FP}{n}} = \frac{AP}{AP + FP} = \frac{a}{a + b}$$

Boala / Test	B Cu boala	non(B) Fara boala	Total
T Test pozitiv	a (AP)	b (FP)	a+b
non (T) test negativ	c (FN)	d (AN)	c+d
Total	a+c	b+d	n

## Valoarea predictivă negativă VPN

- Probabilitatea ca un test nou negativ să nu indice boala (să fie corect):

$$VPN = \Pr(nonB / nonT) = \frac{\Pr(nonB \cap nonT)}{\Pr(nonT)} = \frac{AN}{FN + AN} = \frac{d}{c + d}$$

Boala / Test	B Cu boala	non(B) Fara boala	Total
T Test pozitiv	a (AP)	b (FP)	a+b
non (T) test negativ	c (FN)	d (AN)	c+d
Total	a+c	b+d	n

# Sensitivitatea testului Se

- Probabilitatea ca un bolnav să aibă test nou pozitiv:

$$Se = \Pr(T / B) = \frac{AP}{AP + FN} = \frac{a}{a + c} = \frac{\frac{a}{n}}{\frac{a + c}{n}} = \frac{\Pr(T \cap B)}{\Pr(B)}$$

Boala / Test	B Cu boala	non(B) Fara boala	Total
T Test pozitiv	a (AP)	b (FP)	a+b
non (T) test negativ	c (FN)	d (AN)	c+d
Total	a+c	b+d	n

# Specificitatea testului Sp

- Probabilitatea ca un indemn de boală să aibă test nou negativ:

$$Sp = \Pr(\text{non}(T) / \text{non}(B)) = \frac{AN}{FP + AN} = \frac{d}{b + d} = \frac{\frac{d}{n}}{\frac{b + d}{n}} = \frac{\Pr(\text{non}T \cap \text{non}B)}{\Pr(\text{non}B)}$$

Boala / Test	B Cu boala	non(B) Fara boala	Total
T Test pozitiv	a (AP)	b (FP)	a+b
non (T) test negativ	c (FN)	d (AN)	c+d
Total	a+c	b+d	n

# Măsurarea riscului: RR

# Riscul relativ RR

= raportul dintre cazurile de îmbolnăvire la cei cu expunere la factorul de risc și cazurile de îmbolnăvire la cei fără expunere la factorul de risc

$$RR = \frac{P(B|A)}{P(B|\bar{A})}$$

Non A

$$RR = \frac{P(Boala|Factor\ de\ risc)}{P(Boala|\overline{Fără\ factor\ de\ risc})}$$

# Interpretare RR

$$RR=1$$

Nu există risc de îmbolnăvire la persoanele expuse

200 fumători din 10.000 fac cancer de plămâni

$$P(\text{cancer}|\text{fumători}) = 0,02$$

200 nefumători din 10.000 fac cancer de plămâni

$$P(\text{cancer}|\text{nefumători}) = 0,02$$

riscul relativ

$$RR = \frac{0,02}{0,02} = 1$$

$$RR>1$$

Există risc de a face boala dacă există expunere la factorul de risc

200 fumători din 10.000 fac cancer de plămâni

$$P(\text{cancer}|\text{fumători}) = 0,02$$

10 nefumători din 10.000 fac cancer de plămâni

$$P(\text{cancer}|\text{nefumători}) = 0,001$$

riscul relativ

$$RR = \frac{0,02}{0,001} = 20$$

$$RR<1$$

Expunerea este factor de protecție pentru boală

10 fumători din 10.000 fac cancer de plămâni

$$P(\text{cancer}|\text{fumători}) = 0,001$$

200 nefumători din 10.000 fac cancer de plămâni

$$P(\text{cancer}|\text{nefumători}) = 0,02$$

riscul relativ

$$RR = \frac{0,001}{0,02} = 0,05$$

# Interpretare RR

$$RR=1$$

Nu există risc de îmbolnăvire la persoanele expuse

$$RR=20$$

Există risc de 20 de ori mai mare de a face boala dacă există expunere la factorul de risc

$$RR=0,05$$

Există risc de 20 de ori mai mic de a face boala dacă există expunere la factorul de risc



# Teorema lui Bayes

Evenimente dependente (cauză și efect)

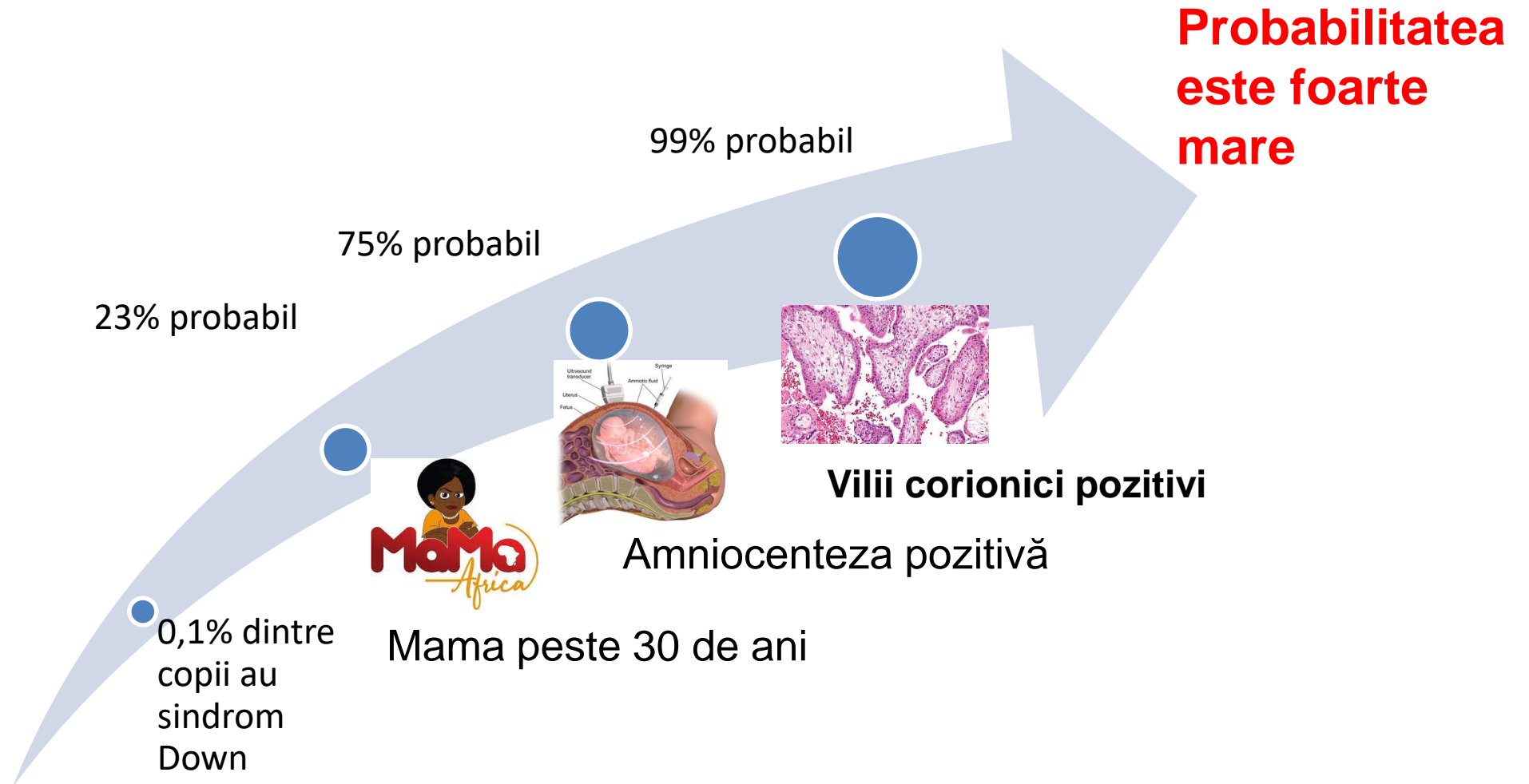
Probabilitatea condiționată - probabilitatea unui rezultat care depinde de un rezultat anterior.

$$Pr(A | B) = \frac{Pr(B | A) * Pr(A)}{Pr(B)}.$$

Implicată în luarea deciziilor medicale - teste diagnostice.

# Sindrom Down la făt în timpul sarcinii?

## Prezintă fătul afecțiunea? Putem să fim destul de siguri ca să facem o întrerupere de sarcină?



# Multumesc!